

Del B	Uppgift 1-6. Endast svar krävs.
Del C	Uppgift 7-15. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	150 minuter för Del B och Del C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 67 poäng varav 23 E-, 24 C- och 20 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 18 poäng

D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå

C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå

B: 46 poäng varav 7 poäng på A-nivå

A: 55 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux: _____

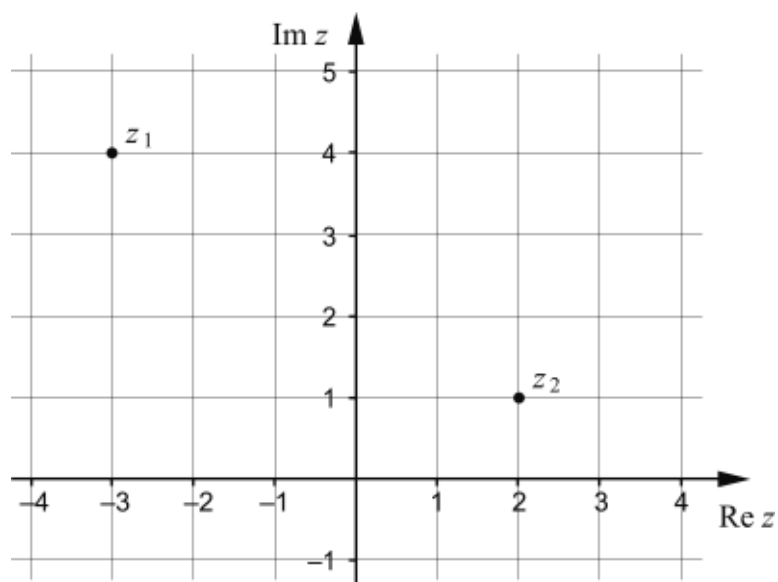
Del B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs.* Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. Derivera

a) $f(x) = \sin 2x$ _____ (1/0/0)

b) $g(x) = (4x+1)^5$ _____ (1/0/0)

2. Figuren visar ett komplext talplan där talen z_1 och z_2 är markerade.

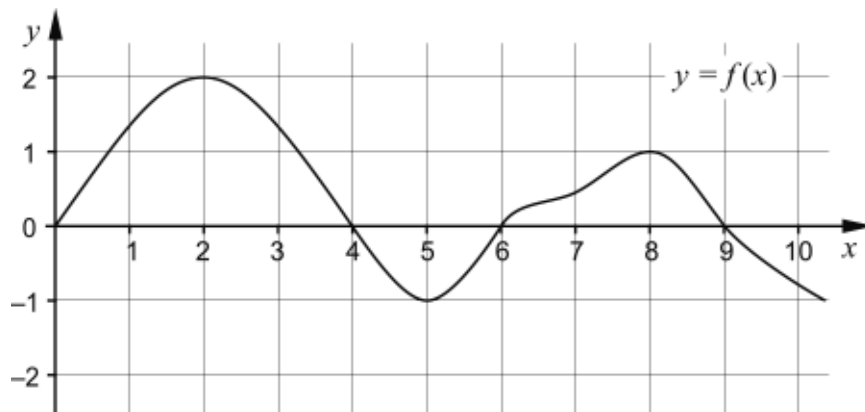


a) Bestäm \bar{z}_2 _____ (1/0/0)

b) Bestäm $z_1 + z_2$ _____ (1/0/0)

3. Ange den lodräta asymptoten till $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ _____ (1/0/0)

4. Figuren visar grafen till funktionen f .



För vilket värde på a i intervallet $0 \leq a \leq 10$ antar

$\int_0^a f(x) dx$ sitt största värde? _____ (0/1/0)

5. För vilka vinklar i intervallet $0^\circ < \nu < 90^\circ$ gäller att $\sin 3\nu < \frac{1}{2}$?

_____ (0/1/1)

6. Ange en kontinuerlig funktion f som är definierad för alla x och har värdemängden $-1 \leq f(x) \leq 7$

_____ (0/0/1)

Del C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

7. Några elever har fått i uppgift att beräkna $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

Agnés får svaret e

Ingela får svaret 0

Kerstin får svaret 1

Har någon av dem räknat rätt? Motivera ditt svar. (2/0/0)

8. För två komplexa tal z_1 och z_2 gäller att:

- $z_1 \cdot z_2 = 7 + i$
- $z_1 = 3 - i$

Bestäm z_2 på formen $a + bi$ (2/0/0)

9. a) Visa att $\cos^2 x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 \right) = 1$ för alla x där uttrycken är definierade. (2/0/0)

b) Visa att $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x - \sin x$ (0/2/0)

10. Lös ekvationen $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (1/1/0)

11. För funktionen f gäller att $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$
- a) Ange asymptoterna till funktionen f *Endast svar krävs* (1/1/0)
- b) Skissa grafen till funktionen f och dess asymptoter. (0/2/0)
- c) Lös olikheten $|f(x)| > 3$ där $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ (0/0/2)
12. Ekvationen $z^p = i$ ska undersökas för olika värden på heltalet p .
För vissa värden på heltalet p är $z_1 = \cos 9^\circ + i \sin 9^\circ$ en lösning till ekvationen $z^p = i$
- a) Visa att detta gäller för $p = 50$, det vill säga visa att z_1 är en lösning till $z^{50} = i$ (0/2/0)
- b) Bestäm alla heltalsvärden på p för vilka z_1 är en lösning till ekvationen $z^p = i$ (0/0/2)
13. För polynomet p gäller att $p(z) = z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8$
- a) Visa att $(z^2 + 4)$ är en faktor i polynomet p . (0/2/0)
- b) Lös ekvationen $z^5 + 4z^3 - 2z^2 - 8 = 0$ (0/1/2)
14. Beräkna $\int_0^{\pi/6} (2 \sin x + 5) \cos x \, dx$ (0/0/2)

15. Lasse och Niklas ska lösa följande uppgift:

Undersök om funktionen $f(x) = \frac{1}{2x-5}$ antar något största värde då $x \geq 0$

Lasse löser uppgiften så här:

$$f(x) = \frac{1}{2x-5}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{(2x-5)^2} < 0 \text{ för alla } x.$$

Då är f avtagande och har sitt största värde i den vänstra ändpunkten, d.v.s. för $x=0$.

$$f(0) = -\frac{1}{5}$$

Svar: Det största värdet är $-\frac{1}{5}$

Niklas säger att Lasses svar är fel eftersom funktionen kan anta större värden än $-\frac{1}{5}$. Till exempel antar funktionen värdet 1 då $x=3$

Utred vilket fel Lasse gör i sin lösning och lös den givna uppgiften.

(0/0/3)

Del D	Uppgift 16-23. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Del A) och tre skriftliga delprov (Del B, Del C och Del D). Tillsammans kan de ge 67 poäng varav 23 E-, 24 C- och 20 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget

E: 18 poäng

D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå

C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå

B: 46 poäng varav 7 poäng på A-nivå

A: 55 poäng varav 12 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: _____

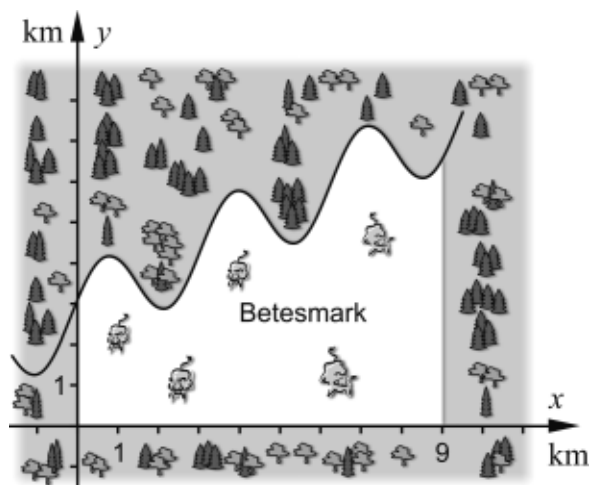
Födelsedatum: _____

Gymnasieprogram/Komvux: _____

Del D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

16. Skriv det komplexa talet $z = 2 + 2i$ på polär form. (2/0/0)

17. En betesmark för kor avgränsas av skog och en ringlande bäck enligt figuren nedan.



Enligt en förenklad modell kan bäckens läge beskrivas med funktionen

$$f(x) = 0,5x + \sin 2x + 3$$

Beräkna betesmarkens area.

(2/0/0)

18. Ekvationen $\frac{x}{5} + \cos 2x = 2$ har flera lösningar.

Samtliga lösningar ligger i intervallet $-20 \leq x \leq 20$

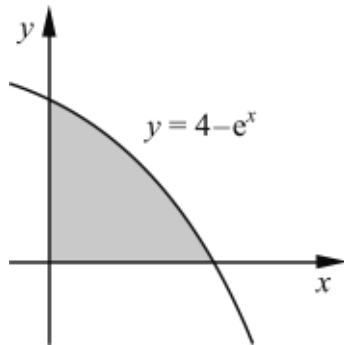
a) Bestäm den minsta lösningen till ekvationen.
Svara med minst tre värdesiffror.

(1/0/0)

b) Bestäm antalet lösningar till ekvationen.

(1/0/0)

19. I figuren nedan visas det område som begränsas av kurvan $y = 4 - e^x$ och koordinataxlarna.



När området roteras runt x -axeln bildas en rotationskropp.
Teckna ett uttryck för rotationskroppens volym och bestäm dess värde med minst tre värdesiffror.

(0/3/0)

20. En fågelunge faller från en 8,0 m hög klippa. För att förenklat beskriva fallrörelsen kan följande differentialekvation ställas upp:

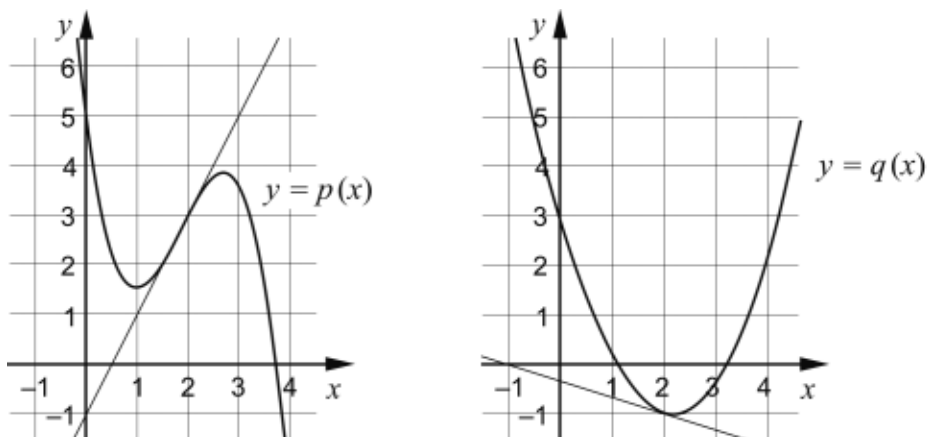
$$\frac{dv}{dt} + 5v = 10 \quad \text{där } v \text{ är fallhastigheten i m/s efter tiden } t \text{ sekunder.}$$

- a) Visa att $v(t) = 2 - 2 \cdot e^{-5t}$ är en lösning till differentialekvationen. (1/0/0)
- b) Bestäm tiden det tar för fågelungen att falla 8,0 m. (0/3/0)

21. Ett företag har undersökt hur länge kunder som ringer till deras kundservice behöver vänta innan de får svar. De har funnit att väntetiden t minuter har en fördelning som kan beskrivas med täthetsfunktionen $f(t) = \frac{1}{6} e^{-t/6}$, $t \geq 0$

- a) Bestäm sannolikheten att en kund som ringer till företaget behöver vänta högst 10 minuter på svar. (0/2/0)
- b) Företaget vill informera om resultatet av undersökningen genom följande formulering: "Vår kundundersökning visar att 50 % av våra kunder behöver vänta högst x minuter."
Bestäm värdet på x . (0/2/0)

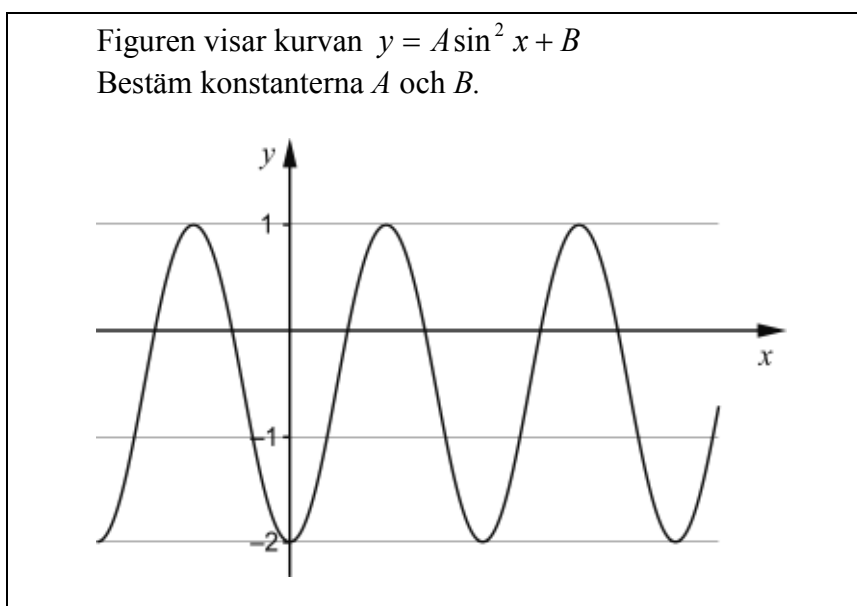
22. Figurerna visar kurvorna $y = p(x)$ och $y = q(x)$ samt tangenterna till dessa för $x = 2$



Låt $r(x) = p(x) \cdot q(x)$ och bestäm $r'(2)$.

(0/0/2)

23. I Lisas matematikbok finns följande uppgift:



Lisa löser uppgiften så här:

$$A = \frac{1 - (-2)}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$B = \frac{1 + (-2)}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5 \quad \text{Svar: } A=1,5 \text{ och } B=-0,5$$

Lisas lösning är inte korrekt. Hjälp Lisa att lösa uppgiften korrekt.

(0/0/2)